Gebrochen-rationale Funktionen mit Parameter I
Übung

Gegeben sind die gebrochen - rationalen Funktionen $f_a: x \mapsto f_a(x)$ durch

$$f_a(x) = \frac{ax^2 - a^2x}{(x-a)(x-2a)} \text{ mit } a \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0.$$

Der Graph einer Funktion f_a wird mit G_{f_a} bezeichnet. Die maximale Definitionsmenge von f_a wird mit D_{max} bezeichnet.

a) Geben Sie D_{max} in Abhängigkeit vom Parameter a an. (2 BE)

b) Berechnen Sie alle Nullstellen von f_a (2 BE)

c) Ermitteln Sie alle Asymptoten von f_a (Lage und Art, mit Begründung). (3 BE)

d) Für welche Werte von a verläuft G_{f_a} durch den Punkt $P(2; -\frac{1}{2})$? (4 BE)

Sei nun $a = -1$ und $f_{-1}(x) = \frac{-(x^2+x)}{(x+1)(x+2)}$.

e) Zeigen Sie: $G_{f_{-1}}$ besitzt keine gemeinsamen Punkte mit der Geraden $y = -1$. (4 BE)

f) Geben Sie den Schnittpunkt von $G_{f_{-1}}$ mit der y – Achse an. Berechnen Sie $f_{-1}(-4)$ sowie $f_{-1}(4)$ und skizzieren Sie $G_{f_{-1}}$ in ein Koordinatensystem im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und ohne Berechnung weiterer Funktionswerte ein. (6 BE)

Gebrochen – rationale Funktionen mit Parameter I
Lösung

a) $D_{max} \setminus \{a; 2a\}$

b) Nullstellen bei $x_1 = 0$; $[x_2 = a \notin D_{max}]$

c) Senkrechte Asymptote: $x = 2a$ (Polstelle 1. Ordnung)
Waagrechte Asymptote: $y = a$ $(z = n = 2)$

d) $f_a(2) = -\frac{1}{2}$;
$\frac{4a-2a^2}{(2-a)(2-2a)} = -\frac{1}{2}$; $a \neq 1$ und $a \neq 2$;
$a^2 - a - 2 = 0$
$a_1 = -1$
$[a_2 = 2]$, dieser Wert kann nicht angenommen werden, weil ansonsten der Nenner Null würde.

e) Der Ansatz $f_{-1}(x) = -1$ ergibt die Gleichung $-x^2 - x = -x^2 - 3x - 2$.
Diese besitzt die einzige Lösung $x_3 = -1$, was nicht im Definitionsbereich liegt.
Folglich besitzt $G_{f_{-1}}$ keinen gemeinsamen Punkt mit der Waagrechten $y = -1$.

f) $S_y(0; 0)$; $f_{-1}(-4) = -2$; $f_{-1}(4) = -\frac{2}{3} \approx -0{,}67$